الوحدة الثالثة
سلوك الدالة ورسم المنحنيات

٣ - ١ تزايد وتناقص الدوال

✸ إختبار المشتقة الأولى للدوال المطردة:

نظرية: إذا كانت د(س) دالة قابلة للإشتقاق على الفترة]أ ، ب[فإن:

١) إذا كان د′(س) > ٠ لجميع قيم س ∋]أ ، ب[فإن د(س) متزايدة فى هذه الفترة

٢) إذا كان د′(س) < ٠ لجميع قيم س ∋]أ ، ب[فإن د(س) متناقصة فى هذه الفترة

اى أن الدالة د(س) تكون متزايدة فى فترة اذا كانت مشتقتها الأولى موجبة خلال تلك الفترة وتكون متناقصة إذا كانت مشتقتها الأولى سالبة خلال تلك الفترة

خطوات بحث التزايد والتناقص:

١) نوجد المشتقة الأولى للدالة أى د′(س)
٢) نضع د′(س) = ٠ ونحل المعادلة للحصول على قيم س ولتكن $س_١$ ، $س_٢$ ، ...
٣) نقسم المجال الى فترات جزئية بالنقط $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، ...
٤) نبحث اشارة د′(س) داخل كل فترة ببحث إشارة المقدار الجبرى أو باختيار نقطة من داخل كل فترة والتعويض بها فى د′(س) لتحديد اشارتها داخل الفترة

- اذا كانت د′(س) > ٠ اى موجبة فى فترة تكون الدالة متزايدة فى هذه الفترة
- اذا كانت د′(س) < ٠ اى سالبة فى فترة تكون الدالة متناقصة فى هذه الفترة

مثـــال:

حدد فترات التزايد والتناقص للدالة د(س) = $س^٣$ − ٩$س^٢$ + ١٥ س

الحــــل:

∵ د(س) = $س^٣$ − ٩$س^٢$ + ١٥ س كثيرة حدود ∴ د(س) متصله وقابلة للإشتقاق على ح

∴ د′(س) = ٣$س^٢$ − ١٨ س + ١٥ بوضع د′(س) = ٠

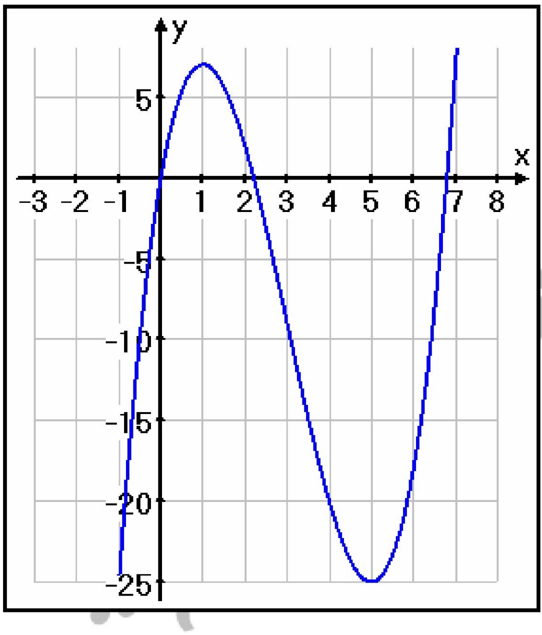
∴ ٣$س^٢$ − ١٨ س + ١٥ = ٠ ← ∴ $س^٢$ − ٦ س + ٥ = ٠

∴ (س − ١)(س − ٥) = ٠ ← ∴ س = ١ ، س = ٥

نحدد اشارة د′(س) فى كل فترة ببحث إشارة المقدار الجبرى
ومن جدول التغيرات المقابل نـجد أن:

س	∞		٥		١		∞-
د′(س)		+ + + +	⊙	- - - - -	⊙	+ + + +	
د(س)		تزايدية ↗		تناقصية ↘		تزايدية ↗	

د(س) متزايدة فى الفترة]−∞ ، ١[
، د(س) متناقصة فى الفترة]١ ، ٥[
، د(س) متزايدة فى الفترة]٥ ، ∞[



ملاحظات:

١) عند رسم منحنى الدالة باستخدام أحد البرامج الرسومية نـجد أن سلوك الدالة يطابق ماتم استنتاجه بجدول التغيرات

٢) المماس للمنحنى يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات فى فترات التزايد وزاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات فى فترات التناقص

٣) قيم س التى تفصل بين فترات التزايد والتناقص هى القيم التى عندها تكون المشتقة الأولى تساوى صفر أو غير موجودة أى الدالة غير قابلة للإشتقاق

مثـــال:

حدد فترات التزايد والتناقص للدالة د(س) = س − ٢جتاس حيث: ٠ ≤ س < ٢π

الحــــل:

∵ د(س) = س − ٢جتاس كثيرة حدود ودالة جيب التمام ∴ د(س) متصله وقابلة للإشتقاق على ح

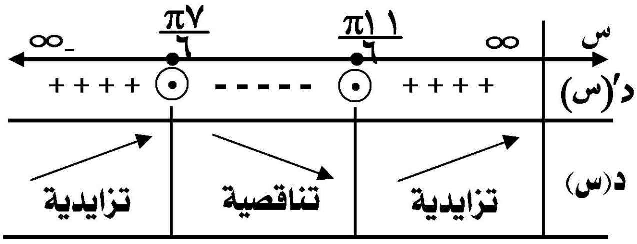
∴ د′(س) = ١ + ٢جاس بوضع د′(س) = ٠

∴ ١ + ٢جاس = ٠ ← ∴جاس = $\frac{-١}{٢}$ ، ∵ ٠ ≤ س < ٢π

∴ س فى الربع الثالث ∴ س = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠° = $\frac{٧\pi}{٦}$

أو س فى الربع الرابع ∴ س = ٣٦٠° − ٣٠° = ٣٣٠° = $\frac{١١\pi}{٦}$

نحدد اشارة د′(س) فى كل فترة بإختيار نقطة من داخل كل فترة



أولا: خلال الفترة $]-\infty ، \frac{7\pi}{6}[$

$\therefore$ د'(π) = ١ + ٢جاπ = ١ > ٠

$\therefore$ د(س) متزايدة فى الفترة $]-\infty ، \frac{7\pi}{6}[$

ثانيا: خلال الفترة $]\frac{7\pi}{6} ، \frac{11\pi}{6}[$

$\therefore$ د'$(\frac{3\pi}{2})$ = ١ + ٢جا$\frac{3\pi}{2}$ = −١ < ٠ $\therefore$ د(س) متناقصة فى الفترة $]\frac{7\pi}{6} ، \frac{11\pi}{6}[$

ثالثا: خلال الفترة $]\frac{11\pi}{6} ، \infty[$

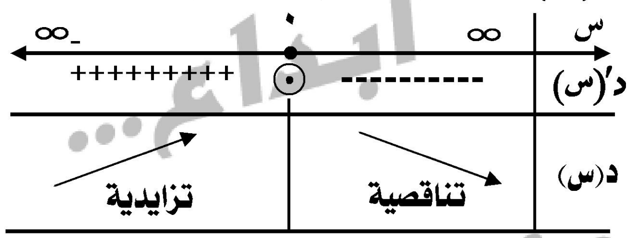
$\therefore$ د'(2π) = ١ + ٢جا2π = ١ > ٠ $\therefore$ د(س) متزايدة فى الفترة $]\frac{11\pi}{6} ، \infty[$

مثـــال:

حدد فترات التزايد والتناقص للدالة د(س) = س − هـ^{س} وباستخدام أحد البرامج الرسومية إرسم منحنى الدالة وتحقق من إجابتك

الحـــل:

$\because$ د(س) = س − هـ^{س} كثيرة حدود ودالة أسية $\therefore$ د(س) متصله وقابلة للإشتقاق على ع



$\therefore$ د'(س) = ١ − هـ^{س}

بوضع د'(س) = ٠ ← $\therefore$ ١ − هـ^{س} = ٠

$\therefore$ هـ^{س} = ١ ← $\therefore$ س = ٠

نحدد اشارة د'(س) فى كل فترة بإختيار نقطة من داخل كل فترة

- خلال الفترة $]-\infty ، ٠[$

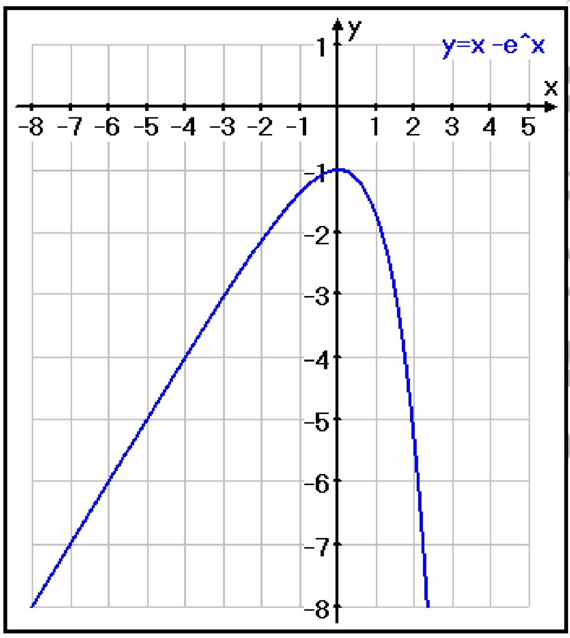
$\therefore$ د'(−١) = ١ − هـ$^{-1}$ = ١ − $\frac{1}{هـ}$ ≃ ٠,٦٣ > ٠

$\therefore$ د(س) متزايدة فى الفترة $]-\infty ، ٠[$

- خلال الفترة $]٠ ، \infty[$

$\therefore$ د'(١) = ١ − هـ ≃ −١,٧٢ < ٠

$\therefore$ د(س) متناقصة فى الفترة $]-\infty ، ٠[$

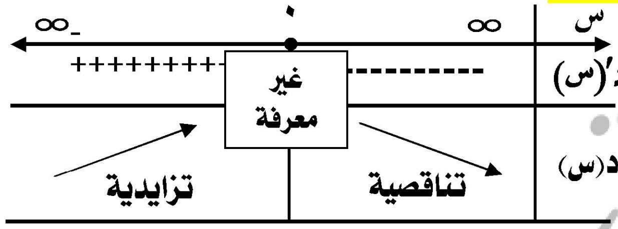


وبرسم منحنى الدالة باستخدام أحد البرامج الرسومية
كما بالشكل المجاور
نـجد أن سلوك الدالة يطابق ماتم استنتاجه بجدول التغيرات

مثـــال:

حدد فترات التزايد والتناقص للدالة د(س) = ٣ − لوهـ $س^{٢}$ وباستخدام أحد البرامج الرسومية إرسم منحنى الدالة وتحقق من إجابتك

الحـــل:

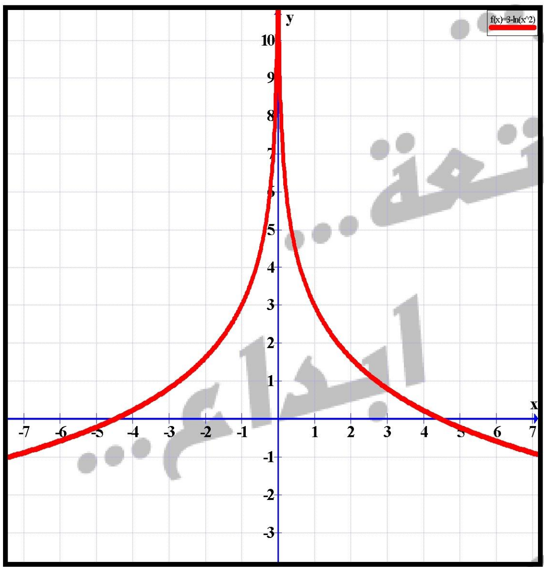


د(س) = ٣ − لوهـ $س^{٢}$ مجال الدالة ع − {٠}

د′(س) = − $\frac{١}{س^{٢}}$ × ٢س = − $\frac{٢}{س}$

∴ د′(س) غير معرفة عند س = ٠

نحدد اشارة د′(س) فى كل فترة بإختيار نقطة من داخل كل فترة



- خلال الفترة]− ∞ ، ٠[

∴ د′(−١) = − $\frac{٢}{−١}$ = ٢ > ٠

∴ د(س) متزايدة فى الفترة]− ∞ ، ٠[

- خلال الفترة]٠ ، ∞[

∴ د′(١) = − $\frac{٢}{١}$ ≃ −٢ < ٠

∴ د(س) متناقصة فى الفترة]− ∞ ، ٠[

وبرسم منحنى الدالة باستخدام أحد البرامج الرسومية

كما بالشكل المجاور نـجد أن سلوك الدالة يطابق ماتم استنتاجه بجدول التغيرات

تذكر أن:

لبحث اشارة المقدار الجبرى:

اولا: المقدار الجبرى من الدرجة الأولى على الصورة د(س) = أس + ب

- اكبر من جذر المعادلة: تكون الاشارة مثل إشارة معامل س
- أصغر من جذر المعادلة: تكون الاشارة عكس إشارة معامل س

ثانيا: المقدار الجبرى من الدرجة الثانية على الصورة د(س) = أ$س^{٢}$ + ب س + جـ

- خارج جذرى المعادلة: تكون الاشارة مثل إشارة معامل $س^{٢}$
- بين جذرى المعادلة: تكون الاشارة عكس إشارة معامل $س^{٢}$

٣ - ٢ القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)

✱ النقط الحرجة:

تعريف: للدالة د المتصلة على الفترة]أ ، ب[نقطة حرجة (جـ ، د(جـ)):

إذا كانت جـ ∈]أ ، ب[، د′(جـ) = ٠ أو الدالة د غير قابلة للإشتقاق عند س = جـ

أى أن النقط الحرجة للدالة هى:

١) النقط التى تكون عندها الدالة غير قابلة للإشتقاق

٢) النقط التى تكون عندها الدالة قابلة للإشتقاق والمشتقه الأولى عندها تساوى صفر

ملاحظة هامة:

النقطة تكون حرجة إذا حققت أحد الشرطين السابقين وكانت تنتمى لمجال الدالة
إما إذا كانت النقطة لاتنتمى لمجال الدالة فلا تكون نقطة حرجة

✱ القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية:

تعريف: إذا كانت د دالة متصلة مجالها ف ، جـ ∈ ف فإنه يوجد للدالة د :

- قيمة عظمى محلية عند س = جـ إذا وجدت فترة مفتوحة]أ ، ب[⊂ ف تحوى جـ بحيث يكون د(جـ) ≤ د(س) لكل س ∈]أ ، ب[
- قيمة صغرى محلية عند س = جـ إذا وجدت فترة مفتوحة]أ ، ب[⊂ ف تحوى جـ بحيث يكون د(جـ) ≥ د(س) لكل س ∈]أ ، ب[

أى أن:

القيمة العظمى المحلية: هى أكبر قيمة تصل اليها الدالة فى جزء صغير من الفترة المعرفة عليها
القيمة الصغرى المحلية: هى اصغر قيمة تصل اليها الدالة فى جزء صغير من الفترة المعرفة عليها

✱ استخدام المشتقة الأولى للقيم العظمى والصغرى المحلية:

إذا كانت (جـ ، د(جـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند جـ ووجدت فترة مفتوحة حول جـ بحيث:

١ – د′(س) > ٠ عندما س < جـ ، د′(س) < ٠ عندما س > جـ فإن د(جـ) قيمة عظمى محلية

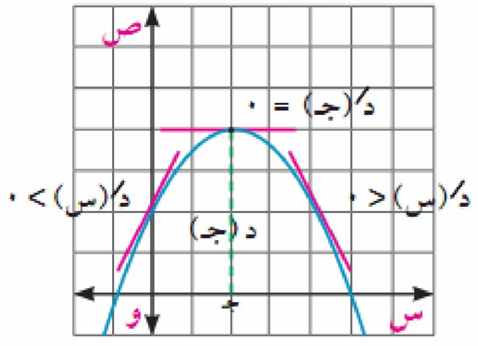
٢ – د′(س) < ٠ عندما س < جـ ، د′(س) > ٠ عندما س > جـ فإن د(جـ) قيمة صغرى محلية

أى أنه

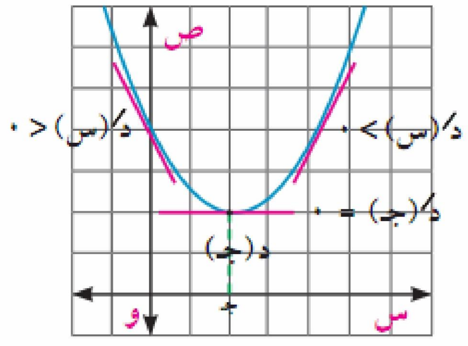
عند القيمة العظمى المحلية تتغير إشارة د'(س) من موجب على يسار جـ الى سالب على يمين جـ

وعند القيمة الصغرى المحلية تتغير إشارة د'(س) من سالب على يسار جـ الى موجب على يمين جـ

كما هو موضح بالشكل التالى:



د (جـ) قيمة عظمى محلية عند جـ



د (جـ) قيمة صغرى محلية عند جـ

٣ – إذا لم يحدث تغير فى إشارة د'(س) على جانبى جـ فإنه لايوجد للدالة قيم عظمى أو صغرى عند جـ

✸ نظرية:

إذا كانت الدالة د قابلة للإشتقاق على الفترة]أ ، ب[وكان للدالة د قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية عند النقطة جـ ∈]أ ، ب[فإن د'(جـ) = ٠ أو د'(جـ) غير موجودة

أى أنه:

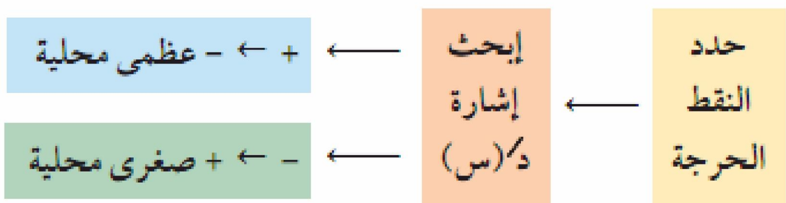
عند نقط القيم العظمى أو الصغرى المحلية تكون المشتقة الأولى للدالة تساوى صفر

ملاحظة:

١) عكس النظرية السابقة غير صحيح دائما

أى أنه إذا كان د'(س$_١$) = ٠ فليس بالضرورة أن توجد قيمة عظمى أو صغرى محلية عند النقطة س$_١$

٢) لتعيين القيم العظمى والصغرى المحلية تتبع المخطط التالى:



📖 مثـــال:

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د(س) = $\frac{١}{٣}$ س^٣ – ٩س + ٣

الحـــــل:

١) تحديد النقط الحرجة ∵ د(س) كثيرة حدود ∴ د(س) متصله وقابلة للإشتقاق على ع

∴ د′(س) = س^{٢} − ٩ = (س + ٣)(س − ٣) ∴ د′(س) = ٠ عندما س = −٣ ، س = ٣

عندما س = −٣ ∴ د(−٣) = $\frac{١}{٣}$ × (−٣)^{٣} − ٩ × (−٣) + ٣ = ٢١

عندما س = ٣ ∴ د(٣) = $\frac{١}{٣}$ × ٣^{٣} − ٩ × ٣ + ٣ = −١٥

توجد نقطتان حرجتان هما (−٣ ، ٢١) ، (٣ ، −١٥)

٢) بحث إشارة د′(س) فى كل فترة ببحث إشارة المقدار الجبرى كما هو موضح بجدول التغيرات

س	∞		٣		−٣		−∞
د′(س)		+ + + +	⊙	- - - - -	⊙	+ + + +	
د(س)		تزايدية		تناقصية		تزايدية	

٣) فى جوار س = −٣

تغيرت إشارة د′(س) من موجبة إلى سالبة

∴ د(−٣) = ٢١ قيمة عظمى محلية

فى جوار س = ٣ تغيرت إشارة د′(س) من سالبة إلى موجبة

∴ د(−٣) = ٢١ قيمة صغرى محلية

مثـــال:

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{١ - \text{س}}$

الحـــل:

∵ د(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{١ - \text{س}}$ ∴ مجال د = ع − {١}

١) تحديد النقط الحرجة

∴ د′(س) = $\frac{٢\text{س}(١ - \text{س}) - (-١)\times \text{س}^{٢}}{(١ - \text{س})^{٢}}$ = $\frac{٢\text{س} - ٢\text{س}^{٢} + \text{س}^{٢}}{(١ - \text{س})^{٢}}$ = $\frac{٢\text{س} - \text{س}^{٢}}{(١ - \text{س})^{٢}}$

∴ د′(س) = ٠ عندما ٢س − س^{٢} = ٠ ← ∴ س = ٠ ، س = ٢

عندما س = ٠ ∴ د(٠) = $\frac{(٠)^{٢}}{١ - ٠}$ = ٠

عندما س = ٢ ∴ د(٢) = $\frac{(٢)^{٢}}{١ - ٢}$ = −٤

توجد نقطتان حرجتان هما (٠ ، ٠) ، (٢ ، −٤)

س	−∞	٠		١	٢	∞
إشارة د′(س)	-		+	+		-
سلوك د (س)	↘	٠	↗	↗	−٤	↘

٢) بحث إشارة $\text{د}'(\text{س})$ فى كل فترة باختيار نقطة من داخل كل فترة كما هو موضح بجدول التغيرات

٣) فى جوار $\text{س} = ٠$ تغيرت إشارة $\text{د}'(\text{س})$ من سالبة إلى موجبة

$\therefore$ $\text{د}(٠) = ٠$ قيمة صغرى محلية

فى جوار $\text{س} = ٢$ تغيرت إشارة $\text{د}'(\text{س})$ من موجبة إلى سالبة

$\therefore$ $\text{د}(٢) = -٤$ قيمة عظمى محلية

ملاحظة:

قد تكون القيمة العظمى المحلية أصغر من القيمة الصغرى المحلية كما فى هذا المثال

مثال:

أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{س}|\text{س} - ٤|$

الحل:

$\because$ $\text{د}(\text{س}) = \text{س}|\text{س} - ٤|$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}(\text{س} - ٤) & : \text{س} \geq ٤ \\ \text{س}(-\text{س} + ٤) & : \text{س} < ٤ \end{cases} \qquad \therefore \text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ٤\text{س} & : \text{س} \geq ٤ \\ -\text{س}^٢ + ٤\text{س} & : \text{س} < ٤ \end{cases}$$

١) تحديد النقط الحرجة

$\because$ $\text{س} = ٤$ نقطة تغير تعريف الدالة $\therefore$ نبحث قابلية الإشتقاق عند $\text{س} = ٤$

$$\therefore \text{د}'(٤^+) = \lim_{\text{هـ} \to ٠^+} \frac{\text{د}(٤ + \text{هـ}) - \text{د}(٤)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^+} \frac{\{(٤ + \text{هـ})^٢ - ٤(٤ + \text{هـ})\} - \{(٤)^٢ - ٤(٤)\}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^+} \frac{٤\text{هـ} + \text{هـ}^٢}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠^+} (٤ + \text{هـ}) = ٤ + ٠ = ٤$$

$$\therefore \text{د}'(٤^-) = \lim_{\text{هـ} \to ٠^-} \frac{\text{د}(٤ + \text{هـ}) - \text{د}(٤)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^-} \frac{\{-(٤ + \text{هـ})^٢ + ٤(٤ + \text{هـ})\} - \{-(٤)^٢ + ٤(٤)\}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to ٠^-} \frac{-٤\text{هـ} - \text{هـ}^٢}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠^-} (-٤ - \text{هـ}) = -٤ - ٠ = -٤$$

∵ $د'(٤^{+}) \neq د'(٤^{-})$ ∴ الدالة د غير قابلة للإشتقاق عند $س = ٤$

∴ $د(٤) = ٤^{٢} - ٤ \times ٤ = ٠$ ∴ (٤ ، ٠) نقطة حرجة للدالة

بالتفاضل

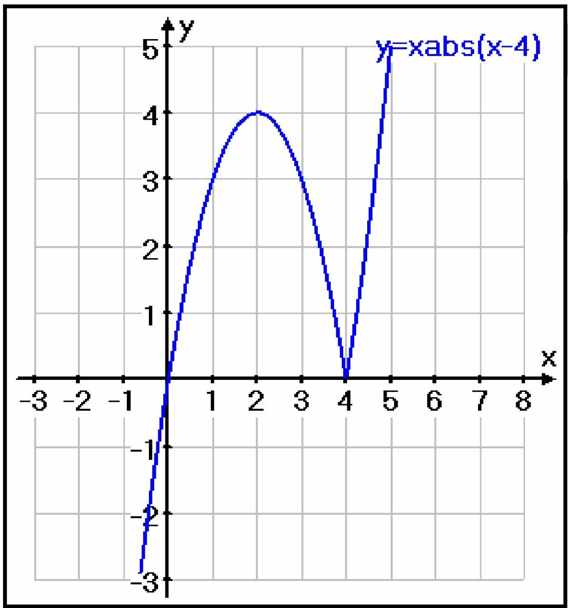
$$∴ د'(س) = \begin{cases} ٢س - ٤ & : س > ٤ \\ -٢س + ٤ & : س < ٤ \end{cases}$$

$د'(س) = ٠$ عندما $س = ٢$

∴ $د(٢) = -٢^{٢} + ٤ \times ٢ = -٤ + ٨ = ٤$

∴ (٢ ، ٤) نقطة حرجة للدالة

	$د'(س) = ٢س - ٤$		$د'(س) = -٢س + ٤$			
س	∞	٤		٢		−∞
د′(س)	+ + + +		- - - - -	⊙	+ + + +	
د(س)	تزايدية		تناقصية		تزايدية	



٢) بحث إشارة د′(س) فى كل فترة بإختيار نقطة من داخل كل فترة كما هو موضح بجدول التغيرات

٣) تحديد القيم العظمى والصغرى المحلية

فى جوار $س = ٢$ تغيرت إشارة د′(س) من (+) إلى (−)

∴ د(٢) = ٤ قيمة عظمى محلية

وفى جوار $س = ٤$ تغيرت إشارة د′(س) من (−) إلى (+)

∴ د(٤) = ٠ قيمة عظمى محلية

وبرسم منحنى الدالة باستخدام أحد البرامج الرسومية نـجد أن سلوك الدالة يطابق ماتم استنتاجه بجدول التغيرات

ملاحظة:

رسم منحنى الدالة فى هذه الأمثلة ليس خطوة من خطوات الحل ولكنه فقط للتوضيح

✸ القيم القصوى للدالة على فترة:

تعريف القيم القصوى:

إذا كانت د(س) دالة معرفة على الفترة المغلقة [أ ، ب] وكانت جـ ∋ [أ ، ب] فإن:

١) د(جـ) هى قيم صغرى على الفترة [أ ، ب] إذا كانت د(جـ) ≥ د(س) لكل س ∋ [أ ، ب]

٢) د(جـ) هى قيم عظمى على الفترة [أ ، ب] إذا كانت د(جـ) ≤ د(س) لكل س ∋ [أ ، ب]

- القيمة الصغرى والقيمة العظمى لدالة على فترة تسمى القيم القصوى (المطلقة) على هذه الفترة
- القيمة القصوى يمكن أن تحدث عند أى نقطة داخل الفترة أو على حدود الفترة وفى هذه الحالة تسمى نقطة حدية قصوى

✵ نظرية:

إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ ، ب] فإن للدالة د قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على الفترة [أ ، ب]

خطوات بحث القيم العظمى والصغرى المطلقة:

لإيجاد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة د(س) المتصلة على الفترة [أ ، ب]

1) نعين النقط الحرجة للدالة.
2) نوجد مجموعة قيم الدالة عند النقط الحرجة وكذلك عند بدية الفترة ونهاية الفترة أى عند أ ، ب
3) نقارن بين مجموعة قيم الدالة واكبر قيمة من هذه القيم تكون هى القيمة العظمى المطلقة للدالة واصغر قيمة من هذه القيم تكون هى القيمة الصغرى المطلقة للدالة

مثـــال:

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة

ص = س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٢٤ س − ١٠ فى الفترة [−١ ، ٥]

الحـــل:

∵ ص = س^{٣} − ٩ س^{٢} + ٢٤ س − ١٠ بالتفاضل ∴ ص$'$ = ٣س^{٢} − ١٨ س + ٢٤

نوجد النقط الحرجة بوضع ص$'$ = ٠

∴ ٣س^{٢} − ١٨ س + ٢٤ = ٠ ⇐ ∴ س^{٢} − ٦ س + ٨ = ٠

∴ (س − ٢)(س − ٤) = ٠ ⇐ ∴ س = ٢ او س = ٤

نوجد قيم الدالة عند س = ٢ وعند س = ٤ وكذلك عند بداية الفترة (−١) وعند نهاية الفترة (٥)

∴ د(٢) = ٢^{٣} − ٩ × ٢^{٢} + ٢٤ × ٢ − ١٠ = ٨ − ٣٦ + ٤٨ − ١٠ = ٥٦ − ٤٦ = ١٠

، د(٤) = ٤^{٣} − ٩ × ٤^{٢} + ٢٤ × ٤ − ١٠ = ٦٤ − ١٤٤ + ٩٦ − ١٠ = ١٦٠ − ١٥٤ = ٦

، د(−١) = (−١)^{٣} − ٩ × (−١)^{٢} + ٢٤ × (−١) − ١٠ = −١ − ٩ − ٢٤ − ١٠ = −٤٤

، د(٥) = ٥^{٣} − ٩ × ٥^{٢} + ٢٤ × ٥ − ١٠ = ١٢٥ − ٢٢٥ + ١٢٠ − ١٠ = ١٠

من القيم السابقة نـجد أن: القيمة العظمى المطلقة = ١٠ ، القيمة الصغرى المطلقة = −٤٤

مثـــال:

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة $د(س) = \frac{٤س}{س^٢ + ١}$ فى الفترة [−١ ، ٣]

الحـــل:

$\because د(س) = \frac{٤س}{س^٢ + ١}$ بالتفاضل $\therefore د'(س) = \frac{٤(س^٢ + ١) - ٢س \times ٤س}{(س^٢+١)^٢}$

$\therefore د'(س) = \frac{٤س^٢ + ٤ - ٨س^٢}{(س^٢+١)^٢} = \frac{٤ - ٤س^٢}{(س^٢+١)^٢}$

$د'(س) = ٠$ عندما $٤ - ٤س^٢ = ٠$ $\therefore س^٢ = ١$ $\therefore س = \pm ١$

نوجد قيم الدالة عند س = −١ وعند س = ١ وكذلك عند نهاية الفترة (٣)

$\therefore د(-١) = \frac{٤ \times (-١)}{(-١)^٢ + ١} = \frac{-٤}{٢} = -٢$

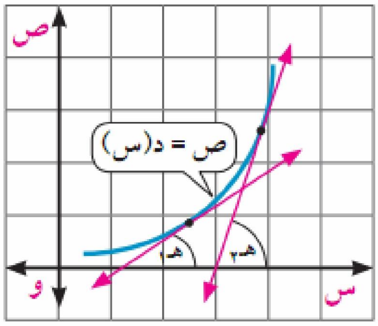
، $د(١) = \frac{٤ \times ١}{(١)^٢ + ١} = \frac{٤}{٢} = ٢$ ، $د(٣) = \frac{٤ \times ٣}{(٣)^٢ + ١} = \frac{١٢}{١٠} = ١,٢$

من القيم السابقة نجد أن: القيمة العظمى المطلقة = ٢ ، القيمة الصغرى المطلقة = −٢

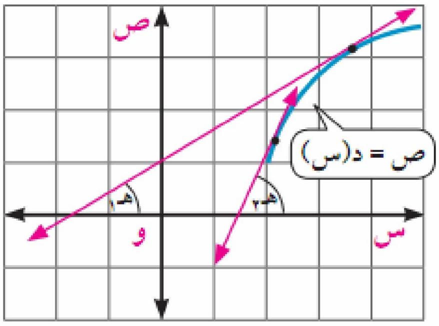
٣ - ٣ رسم المنحنيات

✵ تحدب المنحنيات:

تعريف: لتكن د(س) دالة قابلة للإشتقاق على الفترة]أ ، ب[، فيكون منحنى الدالة د(س) محدبا لأسفل إذا كانت د′(س) متزايدة على هذه الفترة ، ومحدبا لأعلى إذا كانت د′(س) متناقصة على هذه الفترة.



المنحنى محدب لأسفل
د′ متزايدة وتكون مشتقتها موجبة
أى د″(س) > ٠



المنحنى محدب لأعلى
د′ متناقصة وتكون مشتقتها سالبة
أى د″(س) < ٠

أى أن: المنحنى يكون محدب لأعلى فى فترة إذا كان المنحنى يقع أسفل جميع المماسات المرسومه له فى هذه الفترة ويكون محدب لأسفل فى فترة إذا كان المنحنى يقع أعلى جميع المماسات المرسومه له فى هذه الفترة

✵ اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات:

نظرية: لتكن د(س) دالة قابلة للإشتقاق مرتين على الفترة]أ ، ب[

١) إذا كان د″(س) > ٠ لكل س ∋]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدبا لأسفل فى هذه الفترة

٢) إذا كان د″(س) < ٠ لكل س ∋]أ ، ب[فإن منحنى د يكون محدبا لأعلى فى هذه الفترة

خطوات بحث التحدب:

١) نوجد المشتقة الأولى والثانية للدالة أى د′(س) ، د″(س)

٢) نضع د″(س) = ٠ ونحل المعادلة للحصول على قيم س ولتكن $س_١$ ، $س_٢$ ، ...

٣) نبحث اشارة د″(س) داخل كل فترة ببحث إشارة المقدار الجبرى أو باختيار نقطة من داخل كل فترة والتعويض بها فى د″(س) لتحديد اشارتها داخل الفترة

- اذا كانت د″(س) > ٠ فى فترة يكون المنحنى محدب لإسفل فى هذه الفترة
- اذا كانت د″(س) < ٠ فى فترة يكون المنحنى محدب لإعلى فى هذه الفترة

مثـــــال:

عين فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل للمنحنى د(س) = س^{٤} − ٤س^{٣}

الحـــــل:

د(س) = س^{٤} − ٤س^{٣} هى دالة كثيرة حدود ∴ د(س) متصله وقابلة للإشتقاق على ح

∴ د′(س) = ٤س^{٣} − ١٢س^{٢} ، د″(س) = ١٢س^{٢} − ٢٤س

بوضع د″(س) = ٠ ∴ ١٢س^{٢} − ٢٤س = ٠ ∴ ١٢س(س − ٢) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ٢

نقسم المجال الى فترات ونحدد إشارة د″(س) داخل كل فترة ومن جدول التغيرات نلاحظ أن:

- خلال الفترة]−∞ ، ٠[∵ د″(س) > ٠

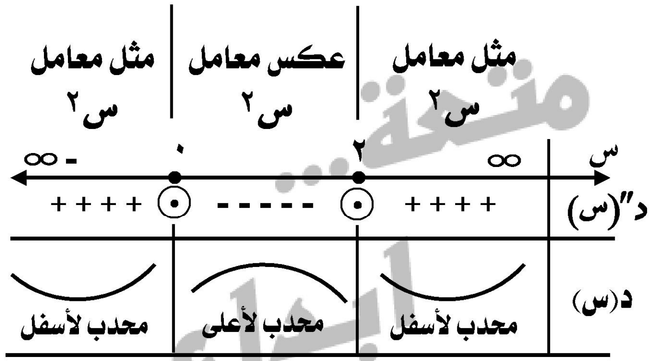
∴ المنحنى محدب لأسفل خلال الفترة]−∞ ، ٠[

- خلال الفترة]٠ ، ٢[∵ د″(س) < ٠

∴ المنحنى محدب لأعلى خلال الفترة]٠ ، ٢[

- خلال الفترة]٢ ، ∞[∵ د″(س) > ٠

∴ المنحنى محدب لأسفل خلال الفترة]٢ ، ∞[



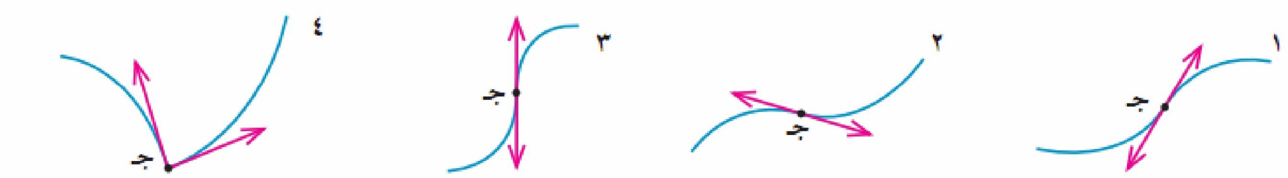
✵ نقط الإنقلاب:

تعريف: إذا كانت د دالة متصلة على الفترة المفتوحة]أ ، ب[، جـ ∈]أ ، ب[وكان لمنحنى الدالة مماس عند النقطة (جـ ، د(جـ)) فإن هذه النقطة تسمى نقطة إنقلاب للدالة إذا تغير تحدب المنحنى عند هذه النقطة من محدب لأسفل إلى محدب لأعلى أو من محدب لأعلى إلى محدب

أى أن النقطة تكون نقطة إنقلاب إذا كان:

١) يوجد عندها مماس للمنحنى وهذا يعنى وجود المشتقة الأولى عند هذه النقطة

٢) يتغير عندها تحدب المنحنى من محدب لأسفل إلى محدب لأعلى أو العكس كما هو موضح بالشكل



توجد نقط انقلاب للمنحنيات ١ ، ٢ ، ٣ لتغير اتجاه تحدب المنحنى ووجود مماس له عند جـ

لا توجد نقط انقلاب لعدم وجود مماس عند جـ

مثـــال:

إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + 6\text{س} + 9 & : \text{س} < -1 \\ 3\text{س}^2 - \text{س}^3 & : \text{س} \geq -1 \end{cases}$

حدد فترات التحدب لأعلى والتحدب لأسفل لمنحنى الدالة د وأوجد نقط الإنقلاب ومعادلة المماس عندها.

الحـــل:

$\because$ س $= -1$ نقطة تغير تعريف الدالة $\therefore$ نبحث قابلية الإشتقاق عند س $= -1$

$$\therefore \text{د}'(-1^+) = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\text{د}(-1+\text{هـ}) - \text{د}(-1)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\{3(-1+\text{هـ})^2 - (-1+\text{هـ})^3\} - \{3(-1)^2 - (-1)^3\}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{\{3 - 6\text{هـ} + 3\text{هـ}^2 + 1 - 3\text{هـ} + 3\text{هـ}^2 - \text{هـ}^3\} - \{3 + 1\}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^+} \frac{-9\text{هـ} + 6\text{هـ}^2 - \text{هـ}^3}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^+} (-9 + 6\text{هـ} - \text{هـ}^2) = -9$$

$$\therefore \text{د}'(-1^-) = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{\text{د}(-1+\text{هـ}) - \text{د}(-1)}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{\{(-1+\text{هـ})^2 + 6(-1+\text{هـ}) + 9\} - \{(-1)^2 + 6(-1) + 9\}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{\{1 - 2\text{هـ} + \text{هـ}^2 - 6 + 6\text{هـ} + 9\} - \{1 - 6 + 9\}}{\text{هـ}}$$

$$= \lim_{\text{هـ} \to 0^-} \frac{4\text{هـ} + \text{هـ}^2}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to 0^-} (4 + \text{هـ}) = 4$$

$\because \text{د}'(-1^+) \neq \text{د}'(-1^-)$ $\therefore$ الدالة د غير قابلة للإشتقاق عند س $= -1$

$\therefore \text{د}(-1) = 3(-1)^2 - (-1)^3 = 3 + 1 = 4$ $\therefore (-1 ، 4)$ نقطة حرجة للدالة

بالتفاضل

$\therefore \text{د}'(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} + 6 & : \text{س} < -1 \\ 6\text{س} - 3\text{س}^2 & : \text{س} > -1 \end{cases}$ ، $\text{د}''(\text{س}) = \begin{cases} 2 & : \text{س} < -1 \\ 6 - 6\text{س} & : \text{س} > -1 \end{cases}$

∴ د″(س) = ٠ عندما س = ١

وجدول التغيرات المقابل يوضح إشارة د″(س) وفترات تحدب المنحنى لأعلى ولأسفل

س	∞-		١−		١		∞
إشارة د″		+	غير موجودة	+		−	
تحدب منحنى د		⌣		⌣		⌢	

فترات التحدب:

ومن الجدول نـجد أن:

المنحنى محدب لأسفل فى الفترة]−∞ ، −١[

وفى الفترة]−١ ، ١[

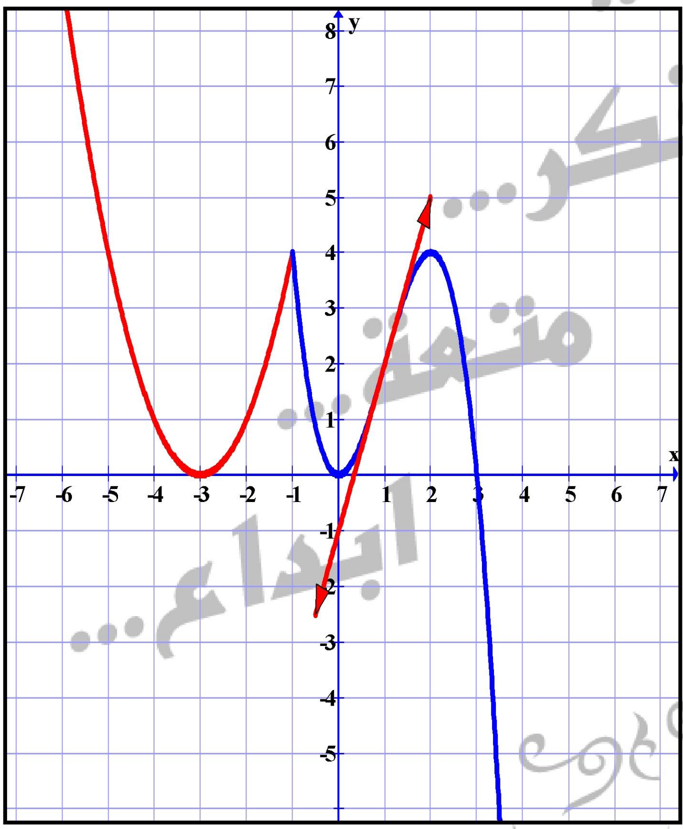
المنحنى محدب لأعلى فى الفترة]١ ، ∞[

نقط الإنقلاب:

النقطة (−١ ، ٤) ليست نقطة إنقلاب لعدم تغير تحدب المنحنى حولها وعدم وجود مماس عندها

لأن د′(−١) غير موجودة

النقطة (١ ، ٢) نقطة إنقلاب لتغير تحدب المنحنى حولها ويوجد عندها مماس للمنجنى



ميل المماس = د′(١) = ٦ × ١ − ٣ × ١^{٢} = ٣

∵ معادلة المماس هى: ص = م س + جـ

∴ ص = ٣س + جـ

∵ المماس يمر بالنقطة (١ ، ٢)

∴ ٢ = ٣ × ١ + جـ ∴ جـ = −١

∴ معادلة المماس هى ص = ٣س − ١

✸ اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى أو الصغرى المحلية:

نظرية: لتكن د(س) دالة قابلة للإشتقاق مرتين على فترة مفتوحة تحوى جـ حيث د′(جـ) = ٠

١) إذا كان د″(جـ) < ٠ فإن د(جـ) قيمة عظمى محلية

٢) إذا كان د″(جـ) > ٠ فإن د(جـ) قيمة صغرى محلية

٣) إذا كان د″(جـ) = ٠ فإن اختبار المشتقة الثانية لايستطيع تحديد النقطة (جـ ، د(جـ)) من حيث كونها عظمى محلية أو صغرى محلية

مثـــال:

باستخدام اختبار المشتقة الثانية أوجد القيم العظمى والصغرى المحلية للدالة د حيث

د(س) = س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س

الحـــل:

د(س) كثيرة حدود فهى متصلة ومجالها ح

∴ د′(س) = ٣س^{٢} − ٦س − ٩ ، د″(س) = ٦س − ٦

د′(س) = ٠ عندما ٣س^{٢} − ٦س − ٩ = ٠ ∴ س^{٢} − ٢س − ٣ = ٠

∴ (س + ١)(س − ٣) = ٠ ∴ س = −١ او س = ٣

∴ د(−١) = (−١)^{٣} − ٣(−١)^{٢} − ٩(−١) = −١ − ٣ + ٩ = ٥

∴ د(٣) = (٣)^{٣} − ٣(٣)^{٢} − ٩(٣) = ٢٧ − ٢٧ − ٢٧ = −٢٧

للدالة نقطتان حرجتان هما (−١ ، ٥) ، (٣ ، −٢٧)

اختبار المشتقة الثانية:

عند س = −١ د″(−١) = ٦(−١) − ٦ = −١٢ < ٠ ∴ د(−١) = ٥ قيمة عظمى محلية

عند س = ٣ د″(٣) = ٦(٣) − ٦ = ١٢ > ٠ ∴ د(٣) = −٢٧ قيمة صغرى محلية

✱ رسم الشكل العام لمنحنيات كثيرات الدوال:

لرسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) نتبع الخطوات التالية:

خطوات رسم الشكل العام لمنحنى الدالة د :

❶ نحدد مجال الدالة ونوعها زوجيه ام فردية وذلك لتحديد تماثلهاحول الصادات أونقطة الأصل

❷ نوجد المشتقة الأولى والمشتقة الثانية للدالة أى د′(س) ، د″(س)

❸ نضع د′(س) = ٠ونحدد فترات التزايد والتناقص ببحث إشارة د′(س) ونعين نقط القيم العظمى والصغرى المحلية(إن وجدت) ونوجد قيم الدالة عندها

❹ نضع د″(س) = ٠ ونحدد فترات التحدب ببحث إشارة د″(س) ونعين موضع نقط الإنقلاب (إن وجدت) ونوجد قيم الدالة عندها

❺ نعين نقط التقاطع مع المحاور

- التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد قيم س
- التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيم ص

❻ نوجد بعض النقط الإضافية والمساعدة بوضع س بقيم اخرى وحساب قيم ص

مثـــال:

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) = ١٢س – س^٣

الحـــل:

د(س) كثيرة حدود فهى متصلة ومجالها ح والدالة فردية

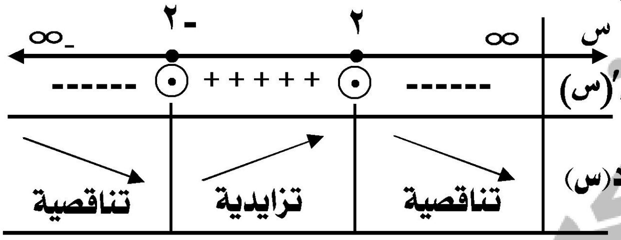
∴ د′(س) = ١٢ – ٣س^٢ ، د″(س) = –٦س

نضع د′(س) = ٠ ∴ ١٢ – ٣س^٢ = ٠

∴ ٣س^٢ = ١٢ ∴ س^٢ = ٤ ∴ س = ±٢

∴ د(٢) = ١٢×٢ – ٢^٣ = ١٦

، د(–٢) = ١٢×(–٢) – (–٢)^٣ = –١٦



للدالة نقطتان حرجتان هما (٢ ، ١٦) ، (–٢ ، –١٦)

فترات التزايد والتناقص

الدالة متناقصة فى الفترة]– ∞ ، –٢[وفى الفترة]٢ ، ∞[ومتزايدة فى الفترة]–٢ ، ٢[

القيم العظمى والصغرى المحلية

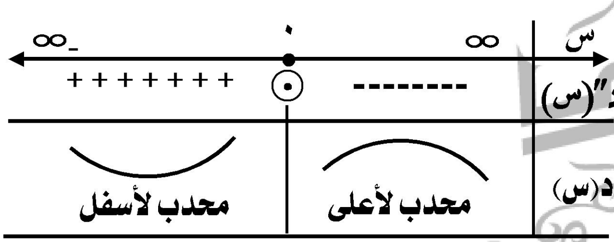
عند س = –٢ تغيرت إشارة د′(س) من سالب إلى موجب

∴ د(–٢) = –١٦ قيمة صغرى محلية

وعند س = ٢ تغيرت إشارة د′(س) من موجب إلى سالب

∴ د(٢) = ١٦ قيمة عظمى محلية

نضع د″(س) = ٠ ∴ –٦س = ٠ ∴ س = ٠



التحدب لأعلى ولأسفل

د″(س) < ٠ فى الفترة]– ∞ ، ٠[

∴ المنحنى محدب لأعلى فى هذه الفترة

، د″(س) > ٠ فى الفترة]٠ ، ∞[

∴ المنحنى محدب لأسفل فى هذه الفترة

نقط الإنقلاب

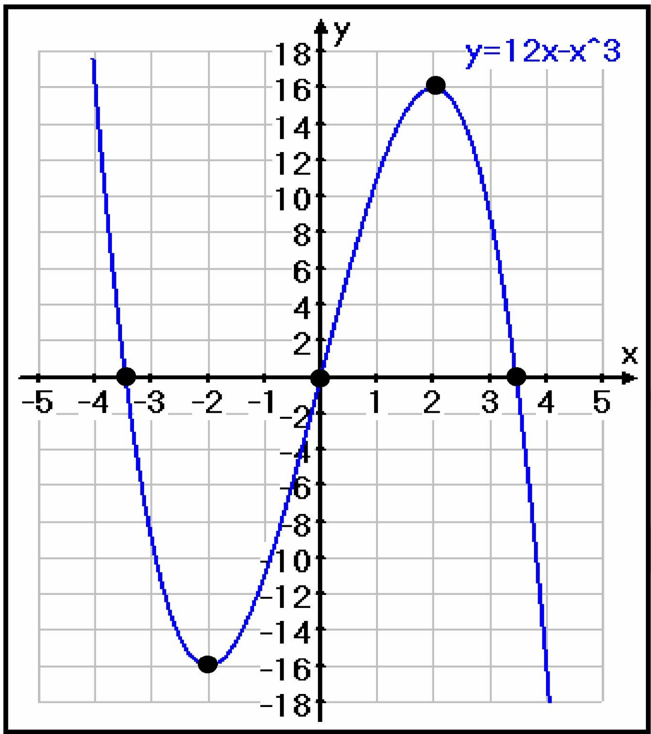
عند س = ٠ تغير تحدب المنحنى من اسفل الى اعلى ويوجد عندها مماس للمنحنى لأن د′(٠) معرفة

∵ د(٠) = ١٢×٠ – ٠^٣ = ٠ ∴ (٠ ، ٠) نقطة إنقلاب للمنحنى

التقاطع مع المحاور:

التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

∴ ص = ٠ ∴ (٠ ، ٠) هى نقطة التقاطع مع محور الصادات



التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ ١٢س − س^{٣} = ٠ ∴ س(١٢ − س^{٢}) = ٠

∴ س = ٠ أو س^{٢} = ١٢

∴ س = ± $\sqrt{١٢}$ = ±٢$\sqrt{٣}$

∴ نقط التقاطع مع محور السينات

(٠ ، ٠) ، (٢$\sqrt{٣}$ ، ٠) ، (−٢$\sqrt{٣}$ ، ٠)

النقط الإضافية:

د(−٣) = ١٢(−٣) − (−٣)^{٣} = −٩

، د(٣) = ١٢(٣) − (٣)^{٣} = ٩

∴ النقط الإضافية هى: (−٣ ، −٩) ، (٣ ، ٩)

والشكل المجاور

يوضح الشكل العام لمنحنى الدالة

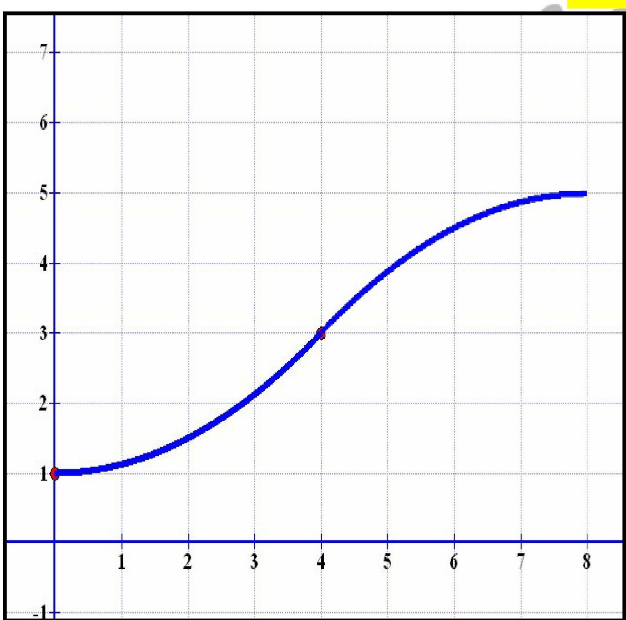
مثـــال:

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س) إذا علمت مايلى:

١ − د متصلة مجالها [٠ ، ∞[، د(٤) = ٣ ، د(٠) = ١ ٢ − د′(س) > ٠ عندما س > ٠

٣ − د″(س) > ٠ عندما س < ٤ ، د″(٤) = ٠ ، د″(س) < ٠ عندما س > ٤

الحـــل:



١ − نرسم محورى الإحداثيات فى المجال [٠ ، ∞[

ونضع النقطتين (٤ ، ٣) ، (٠ ، ١)

٢ − ∵ د′(س) > ٠ عندما س > ٠

∴ الدالة متزايدة على الفترة]٠ ، ∞[

٣ − ∵ د″(س) > ٠ عندما س < ٤

∴ المنحنى محدب لأسفل فى الفترة]٠ ، ٤[

، ∵ د″(س) < ٠ عندما س > ٤

∴ المنحنى محدب لأعلى فى الفترة]٤ ، ∞[

والنقطة (٤ ، ٣) نقطة إنقلاب

ويتم رسم المنحنى الذى يحقق الخواص السابقة كما هو موضح بالشكل

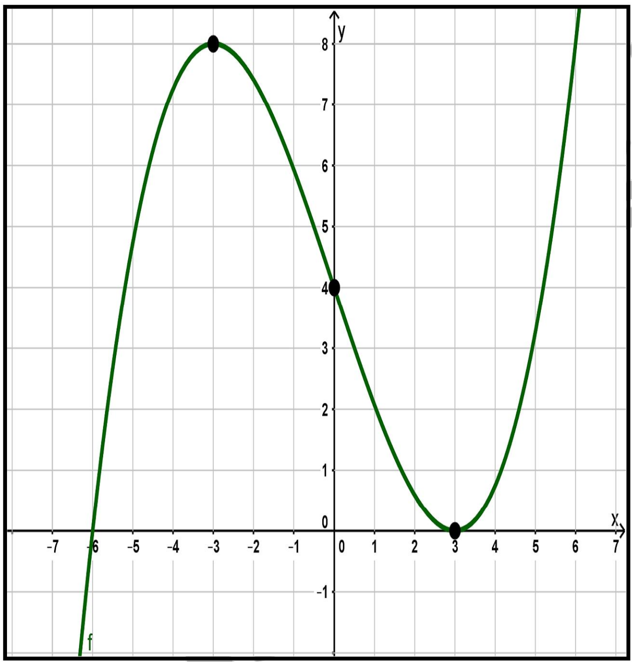
مثـــال:

ارسم الشكل العام لمنحنى الدالة المتصلة د والذى له الخواص الآتية:

د(−٣) = ٨ ، د(٠) = ٤ ، د(٣) = ٠ ، د′(س) > ٠ عندما س < −٣ وعندما س > ٣

، د″(س) < ٠ عندما س < ٠ ، د″(س) > ٠ عندما س > ٠

الحـــل:



نرسم محورى الإحداثيات

ونضع النقط (−٣ ، ٨) ، (٠ ، ٤) ، (٣ ، ٠)

∵ د′(س) > ٠ عندما س < −٣ وعندما س > ٣

∴ الدالة متزايدة فى الفترة]−∞ ، −٣[

ومتزايدة ايضا فى الفترة]٣ ، ∞[

وبالتالى فالدالة متناقصة فى الفترة]−٣ ، ٣[

∵ د″(س) < ٠ عندما س < ٠

∴ المنحنى محدب لأعلى فى الفترة]−∞ ، ٠[

، ∵ د″(س) > ٠ عندما س > ٠

∴ المنحنى محدب لأسفل فى الفترة]٠ ، ∞[

ويتم رسم المنحنى الذى يحقق الخواص السابقة كما هو موضح بالشكل

مثـــال:

إذا كانت النقطة (٢ ، ٢) هى نقطة إنقلاب لمنحنى الدالة د حيث د(س) = س^{٣} + أس^{٢} + ب س

فأوجد قيم أ ، ب الحقيقية

الحـــل:

> **ملاحظة هامة:**
> اذا علمت نقطة الإنقلاب للمنحنى فهذا يعنى أن:
> ١) النقطة تحقق معادلة المنحنى ٢) المشتقة الثانية عند هذه النقطة تساوى صفر

∵ النقطة (٢ ، ٢) نقطة إنقلاب ∴ د(٢) = ٢

∴ ٢^{٣} + أ × ٢^{٢} + ب × ٢ = ٢ ∴ ٤أ + ٢ب = −٦ ∴ ٢أ + ب = −٣ (١)

∴ د′(س) = ٣س^{٢} + ٢أس + ب ، د″(س) = ٦س + ٢أ

$\therefore$ د″(٢) = ٠ $\therefore$ ٦ × ٢ + ٢أ = ٠ $\therefore$ ٢أ = −١٢ **$\therefore$ أ = −٦**

بالتعويض فى (١) $\therefore$ ٢ × (−٦) + ب = −٣ $\therefore$ ب = −٣ + ١٢ **$\therefore$ ب = ٩**

مثـــال:

عين قيم أ ، ب ، جـ ، ء للمنحنى ص = أس^{٣} + بس^{٢} + جـس + ء بحيث تكون له قيمة عظمى محلية عند النقطة (٠ ، ٦) وقيمة صغرى محلية عند التقطة (١ ، ٥) ثم ارسم المنحنى

الحـــل:

ملاحظة هامة:
اذا علمت نقطة القيمة العظمى أو الصغرى فهذا يعنى أن:
١) النقطة تحقق معادلة المنحنى ٢) المشتقة الأولى عند هذه النقطة تساوى صفر

$\because$ النقطة (٠ ، ٦) قيمة عظمى $\therefore$ د(٠) = ٦

$\therefore$ ٦ = أ × ٠ + ب × ٠ + جـ × ٠ + ء **$\therefore$ ء = ٦**

$\because$ النقطة (١ ، ٥) قيمة صغرى $\therefore$ د(١) = ٥

$\therefore$ ٥ = أ × ١ + ب × ١ + جـ × ١ + ٦ $\therefore$ أ + ب + جـ = −١ (١)

$\because$ ص = أس^{٣} + بس^{٢} + جـس + ٦

$\therefore$ ص′ = ٣أس^{٢} + ٢بس + جـ $\therefore$ ص′ = ٠ عند (٠ ، ٦) ، (١ ، ٥)

$\therefore$ ٠ = ٣أ × ٠ + ٢ب × ٠ + جـ **$\therefore$ جـ = ٠** بالتعويض فى (١) $\therefore$ أ + ب = −١ (٢)

$\therefore$ ٠ = ٣أ × ١ + ٢ب × ١ + ٠ $\therefore$ ٣أ + ٢ب = ٠ (٣)

بضرب طرفى المعادلة (٢) فى − ٢ $\therefore$ −٢أ − ٢ب = ٢ بالجمع

$\therefore$ أ = ٢ بالتعويض فى (٢) $\therefore$ ٢ + ب = −١ **$\therefore$ ب = −٣**

$\therefore$ ص = ٢س^{٣} − ٣س^{٢} + ٦

٣ - ٤ تطبيقات على القيم العظمى والصغرى

إعتمادا على أنه عند القيم العظمى أو الصغرى تكون المشتقة الأولى للدالة تساوى صفر فإنه يمكن إستخدام ذلك فى بعض التطبيقات حيث يكون المطلوب أن يكون أحد المتغيرات أكبر أو أصغر مايمكن وتكون خطوات حل هذه النوعية من المسائل كمايلى:

١) يتم رسم شكل توضيحى للمسألة.

٢) يتم فرض المتغيرات الموجودة بالمسألة بأحد الرموز س ، ص ، ع ، ....

٣) يتم تكوين معادلة رياضية بين المتغير المطلوب له اكبر قيمة أو أصغر قيمة وباقى متغيرات المسألة مع ملاحظة أن الطرف الأيسر للمعادلة يجب أن يحتوى على متغير واحد وفى حالة وجود أكثر من متغير يتم التعويض من معطيات المسألة عن هذه المتغيرات بدلالة متغير واحد

٤) يتم إجراء التفاضل لطرفى المعادلة بالنسبة للمتغير الموجود بالطرف الأيسر فنحصل على المشتقة الأولى للمتغير المطلوب له قيمة عظمى أو صغرى

٥) يتم مساواة المشتقة الأولى بالصفر وإيجاد قيم هذا المتغير ثم بحث تغير اشارة المشتقة الأولى عند هذه القيم أوالتعويض بها فى المشتقة الثانية لمعرفة القيمة العظمى أو الصغرى حسب المطلوب

مثـــــال:

عددان مجموعهما ٣٠ أوجد العددين إذا كان حاصل ضربهما أكبر مايمكن.

الحـــــل:

نفرض أن العددين س ، ص وان حاصل ضربهما ع

$\therefore$ س + ص = ٣٠ $\therefore$ ص = ٣٠ − س (١)

$\therefore$ ع = س ص بالتعويض من (١)

$\therefore$ ع = س(٣٠ − س) $\therefore$ ع = ٣٠س − $س^2$ بإشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{دع}{دس}$ = ٣٠ − ٢س ، $\because$ عند أكبر قيمة أو أصغر قيمة يكون $\frac{دع}{دس}$ = ٠

$\therefore$ ٣٠ − ٢س = ٠ $\therefore$ ٢س = ٣٠ $\therefore$ س = ١٥

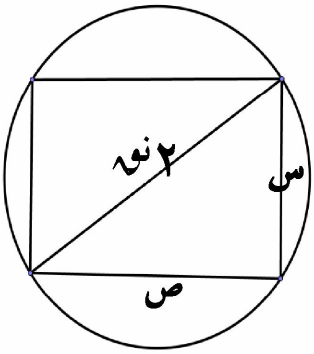
$\because \frac{د^2ع}{دس^2}$ = −٢ < ٠ $\therefore$ حاصل الضرب اكبر مايمكن عند س = ١٥

$\therefore$ ص = ٣٠ − ١٥ = ١٥ $\therefore$ العددان هما ١٥، ١٥

مثـــال:

إوجد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها ٤ سم

الحـــل:



نفرض أن بعدى المستطيل س ، ص ومساحة المستطيل م

$\therefore$ م = س ص

من نظرية فيثاغورث $\quad$ س^{٢} + ص^{٢} = (٢نق)^{٢}

$\therefore$ س^{٢} + ص^{٢} = (٨)^{٢} $\qquad \therefore$ ص = $\sqrt{٦٤ - س^{٢}}$ بالتعويض

$\therefore$ م = س $\sqrt{٦٤ - س^{٢}}$ $\qquad$ بإشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$$\therefore \frac{دم}{دس} = ١ \times \sqrt{٦٤ - س^{٢}} + \frac{-٢س}{٢\sqrt{٦٤ - س^{٢}}} \times س$$

$$\therefore \frac{دم}{دس} = \frac{٦٤ - س^{٢} - س^{٢}}{\sqrt{٦٤ - س^{٢}}} = \frac{٦٤ - ٢س^{٢}}{\sqrt{٦٤ - س^{٢}}}$$

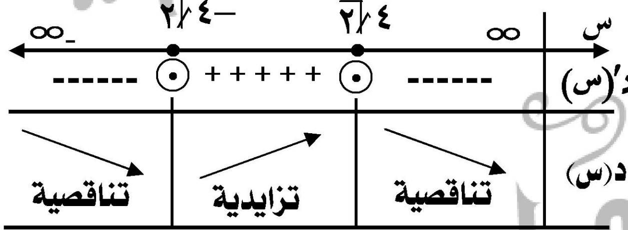
$\because$ عند أكبر قيمة أو أصغر قيمة يكون $\frac{دم}{دس} = ٠$ $\qquad \therefore \frac{٦٤ - ٢س^{٢}}{\sqrt{٦٤ - س^{٢}}} = ٠$

$\therefore$ ٢س^{٢} = ٦٤ $\qquad \therefore$ س^{٢} = ٣٢ $\qquad \therefore$ س = $\sqrt{٣٢}$ = ٤$\sqrt{٢}$ وترفض الإجابة السالبة

$\because$ عند س = ٤$\sqrt{٢}$

تغيرت اشارة م$'$(س) من موجب إلى سالب

عند س = ٤$\sqrt{٢}$ قيمة عظمى للمساحة



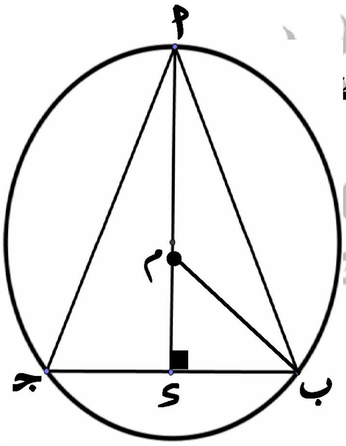
$\therefore$ ص = $\sqrt{٦٤ - (٤\sqrt{٢})^{٢}}$ = ٤$\sqrt{٢}$

$\therefore$ اكبر مساحة للمستطيل هى م = ٤$\sqrt{٢}$ × ٤$\sqrt{٢}$ = ٣٢ سم^{٢}

مثـــال:

اوجد أكبرمساحة لمثلث متساوى الساقين يمكن رسمه داخل دائرة ط

الحـــل:



$\because$ المثلث متساوى الساقين $\quad \therefore$ أد $\perp$ ب جـ $\quad$ ، د منتصف ب جـ

نفرض أن م د = س $\quad$ وأن المساحة = ع

$\because$ ب م = م أ = ١٢ $\qquad \therefore$ ب د = $\sqrt{١٤٤ - س^{٢}}$

$\because$ ع $= \frac{1}{2}$ ب جـ × أ ء $\quad \therefore$ ع = ب ء × أ ء

$\therefore$ ع $= \sqrt{١٤٤ - س^2} \times (س + ١٢)$ باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{دع}{دس} = \frac{-٢س}{٢\sqrt{١٤٤ - س^2}} \times (س + ١٢) + ١ \times \sqrt{١٤٤ - س^2}$

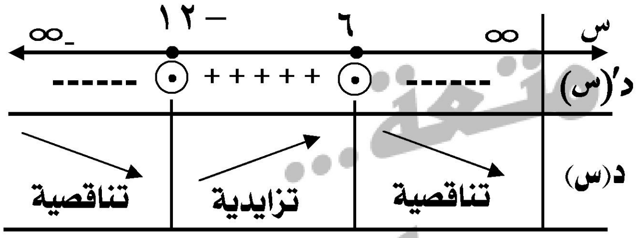
$\therefore \frac{دع}{دس} = \frac{-س^2 - ١٢س + ١٤٤ - س^2}{\sqrt{١٤٤ - س^2}} = \frac{-٢س^2 - ١٢س + ١٤٤}{\sqrt{١٤٤ - س^2}}$

$\because$ عند أكبر قيمة أو أصغر قيمة يكون $\frac{دع}{دس} = ٠$

$\therefore -٢س^2 - ١٢س + ١٤٤ = ٠ \quad \therefore س^2 + ٦س - ٧٢ = ٠$

$\therefore (س - ٦)(س + ١٢) = ٠ \quad \therefore س = ٦$ أو $س = -١٢$ مرفوض

$\because$ عند س = ٦



تغيرت اشارة ع′(س) من موجب إلى سالب

عند $س = ٤\sqrt{٢}$ قيمة عظمى للمساحة

$\therefore$ اكبر مساحة للمثلث هى

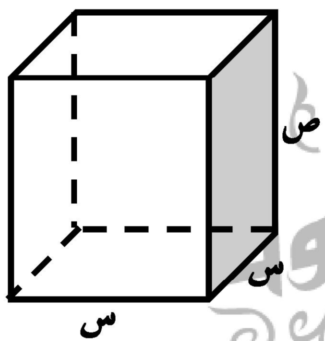
ع $= \sqrt{١٤٤ - ٦^2} \times (٦ + ١٢) = ١٨\sqrt{١٠٨} = ١٠٨\sqrt{٣}$ سم^2

مثال:

خزان على شكل صندوق مغلق سعته ٢٥٢ مترا مكعبا ،وقاعدته مربعة.يراد طلاؤه من الداخل بمادة عازله يتكلف القاع ٥٠ جنيها لكل متر مربع ، ويتكلف الغطاء ٢٠ جنيها لكل متر مربع ، وتتكلف الجوانب ٣٠ جنيها لكل مترمربع،أوجد أبعاد الصندوق التى تجعل التكلفة أقل مايمكن.

الحل:

نفرض أن ابعاد الخزان هى س ، س ، ص وأن تكلفة الطلاء ك



$\therefore$ حجم الخزان = س × س × ص = س^{2}ص

$\therefore س^2ص = ٢٥٢ \quad \therefore ص = \frac{٢٥٢}{س^2}$

$\because$ مساحة القاعدة = مساحة الغطاء = س × س = س^2

، مساحة الجوانب $= ٤س ص = ٤س \times \frac{٢٥٢}{س^2} = \frac{١٠٠٨}{س}$

$\therefore ك = ٥٠س^2 + ٢٠س^2 + ٣٠ \times \frac{١٠٠٨}{س} = ٧٠س^2 + \frac{٣٠٢٤٠}{س}$

$\therefore \frac{دك}{دس} = ١٤٠ س - \frac{٣٠٢٤٠}{س^{٢}}$ ∵ عند أكبر قيمة أو أصغر قيمة يكون $\frac{دك}{دس} = ٠$

$\therefore ١٤٠ س = \frac{٣٠٢٤٠}{س^{٢}}$ $\therefore ١٤٠ س^{٣} = ٣٠٢٤٠$ $\therefore س^{٣} = \frac{٣٠٢٤٠}{١٤٠} = ٢١٦$

$\therefore س = \sqrt[٣]{٢١٦} = ٦$ $\therefore \frac{د^{٢}ك}{دس^{٢}} = ١٤٠ + \frac{٢ \times ٣٠٢٤٠}{س^{٣}}$

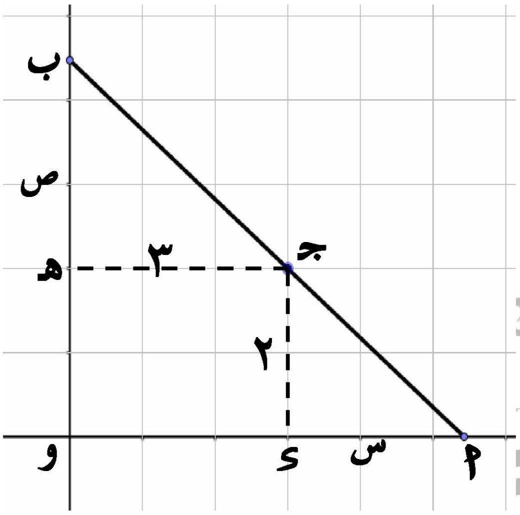
∴ عند $س = ٦$ تكون $\frac{د^{٢}ك}{دس^{٢}} > ٠$ ∴ التكلفة أقل مايمكن $\therefore ص = \frac{٢٥٢}{٦^{٢}} = ٧$

∴ ابعاد الخزان التى تجعل التكلفة أقل مايمكن هى ٦ ، ٦ ، ٧ متر

مثال:

فى مستوى إحداثى متعامد رسم أب يمر بالنقطة جـ(٣، ٢) ويقطع محورى الإحداثيات فى النقطة أ والنقطة ب ، أثبت أن أصغر مساحة للمثلث أ و ب تساوى ١٢ وحدة مربعة حيث و نقطة الأصل.

الحل:



نفرض أن أد = س ، بهـ = ص ومساحة المثلث = م

من تشابه المثلثين أدجـ ، جـهـب نجد أن: $\frac{أد}{جـهـ} = \frac{جـد}{بهـ}$

$\therefore \frac{س}{٣} = \frac{٢}{ص}$ $\therefore س ص = ٦$ $\therefore ص = \frac{٦}{س}$

∵ مساحة Δ وأب $= \frac{١}{٢}$ وأ × وب

$\therefore م = \frac{١}{٢}(س + ٣)(ص + ٢)$

$\therefore م = \frac{١}{٢}(س ص + ٢ س + ٣ ص + ٦)$ بالتعويض عن س ص ، ص

$\therefore م = \frac{١}{٢}(٦ + ٢ س + ٣ \times \frac{٦}{س} + ٦)$ $\therefore م = س + \frac{٩}{س} + ٦$

$\therefore \frac{دم}{دس} = ١ - \frac{٩}{س^{٢}}$ ، ∵ عند أكبر قيمة أو أصغر قيمة يكون $\frac{دم}{دس} = ٠$

$\therefore \frac{٩}{س^{٢}} = ١$ $\therefore س^{٢} = ٩$ $\therefore س = ٣$ وترفض الإجابة السالبة

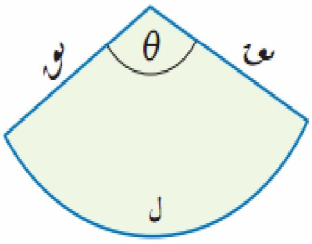
$\because \frac{د^{٢}م}{دس^{٢}} = ٠ - ٩(\frac{-٢}{س^{٣}}) = \frac{١٨}{س^{٣}}$ ∴ عند $س = ٣$ تكون $\frac{د^{٢}م}{دس^{٢}} = \frac{١٨}{٢٧} > ٠$

∴ المساحة أصغر مايمكن ∴ م = ٣ + $\frac{٩}{٣}$ + ٦ = ١٢ وحدة مربعة

مثال:

إذا كان محيط قطاع دائرى = ١٢ سم ، أوجد قياس زاوية القطاع الذى يجعل مساحته أكبر مايمكن.

الحل:



∵ محيط القطاع الدائرى = ٢نق + ل

∴ ٢نق + ل = ١٢ ∴ ل = ١٢ − ٢نق

∵ مساحة القطاع الدائرى = $\frac{١}{٢}$ ل نق

∴ م = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$نق(١٢ − ٢نق) ∴ م = ٦نق − نق^{٢}

∴ $\frac{ءم}{ءنق}$ = ٦ − ٢نق ، ∵ عند أكبر قيمة أو أصغر قيمة يكون $\frac{ءم}{ءس}$ = ٠

∴ ٦ − ٢نق = ٠ ∴ ٢نق = ٦ ∴ نق = ٣

∴ $\frac{ء^{٢}م}{ءنق^{٢}}$ = −٢ < ٠ ∴ المساحة أكبر مايمكن عند نق = ٣

∴ ل = ١٢ − ٢ × ٣ = ٦ ، ∵ θ = $\frac{ل}{نق}$ ∴ θ = $\frac{٦}{٣}$ = ٢ء

مثال:

وجد أحد مصانع الاجهزة الكهربية أنه يكسب ٣٠ جنيها في كل جهاز إذا كان انتاجه الشهري ٥٠ جهازا فإذا زاد الانتاج عن هذا العدد فإن الربح في الجهازيقل ٥٠ قرشا عن كل جهاز زيادة. أوجد عدد الأجهزة التى ينتجها المصنع في الشهر ليحقق اكبر ربح ممكن.

الحل:

نفرض أن عدد الأجهزة الزيادة = س جهاز ∴ عدد الاجهزة الكلية = ٥٠ + س

∴ النقص فى مكسب الجهاز الواحد نتيجة الاجهزة الزيادة = $\frac{١}{٢}$س

∴مكسب الجهاز الواحد نتيجة الاجهزة الزيادة = ٣٠ − $\frac{١}{٢}$س

∴ المكسب الكلى بعد الزيادة = عدد الاجهزة × مكسب الجهاز

∴ م = (٥٠ + س)(٣٠ − $\frac{١}{٢}$س) = ١٥٠٠ + ٥س − $\frac{١}{٢}$س^{٢} بتفاضل الطرفين بالنسبة لـ س

∴ $\frac{دم}{دس} = ٥ - س$ نضع $\frac{دم}{دس} = ٠$ ∴ $٥ - س = ٠$ ← ∴ $س = ٥$

∴ $\frac{د^٢م}{دس^٢} = -١ < ٠$ ∴ الربح أكبر مايمكن عند $س = ٥$

∴ عدد الاجهزة الزيادة = ٥ جهاز ، ∴ عدد الاجهزة الكلية = ٥٥ جهاز

مثـــال:

أوجد نقطة علي المنحنى $ص^٢ = ٤س + ٥$ بحيث تكون المسافة بينها وبين النقطة (٣، ٠) أقل مايمكن.

الحـــل:

نفرض أن النقطة المطلوبة هى (س، ص) ، ∵ النقطة المعلومة هى (٣، ٠)

∵ البعد بين نقطتين $= \sqrt{(س_٢ - س_١)^٢ + (ص_٢ - ص_١)^٢}$

∴ $ف = \sqrt{(س - ٣)^٢ + (ص - ٠)^٢} = \sqrt{س^٢ - ٦س + ٩ + ص^٢}$

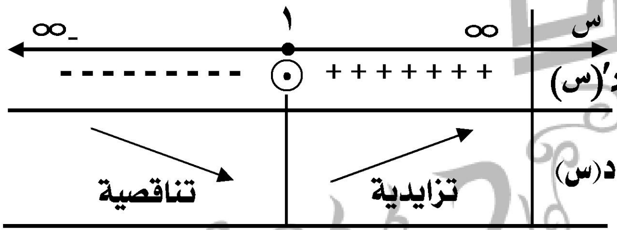
∴ $ف = (س^٢ - ٦س + ٩ + ص^٢)^{\frac{١}{٢}}$

بالتعويض عن $ص^٢$ من معادلة المنحنى حيث $ص^٢ = ٤س + ٥$

∴ $ف = (س^٢ - ٦س + ٩ + ٤س + ٥)^{\frac{١}{٢}} = (س^٢ - ٢س + ١٤)^{\frac{١}{٢}}$ بالتفاضل بالنسبة لـ س

∴ $\frac{دف}{دس} = \frac{١}{٢}(س^٢ - ٢س + ١٤)^{\frac{-١}{٢}} \times (٢س - ٢) = \frac{س - ١}{(س^٢ - ٢س + ١٤)^{\frac{١}{٢}}}$

∵ عند أكبر قيمة أو أصغر قيمة يكون $\frac{دف}{دس} = ٠$



∴ $\frac{س - ١}{(س^٢ - ٢س + ١٤)^{\frac{١}{٢}}} = ٠$

∴ $س - ١ = ٠$ ← ∴ $س = ١$

∵ عند $س = ١$ تغيرت اشارة $ف'(س)$ من سالب إلى موجب ∴ عند $س = ١$ قيمة صغرى

وبالتعويض فى معادلة المنحنى

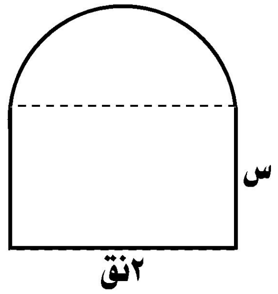
∵ $ص^٢ = ٤س + ٥$ ⇐ ∴ $ص^٢ = ٤ \times ١ + ٥ = ٩$ ⇐ ∴ $ص = \pm ٣$

المسافة أقل مايمكن عند النقطتان: (١، ٣) ، (١، −٣)

مثـــال:

افذه علي هيئة مستطيل يعلوه نصف دائرة ينطبق قطرها علي أحد أبعاد المستطيل فإذا كان محيط النافذه ٦ أمتار. أوجد نصف قطر نصف الدائرة الذي يجعل مساحة النافذه أكبر مايمكن.

الحـــل:



نفرض أن طول نصف قطر الدائرة = نق ∴ طول المستطيل = ٢ نق

نفرض أن عرض المستطيل = س

∴ محيط النافذة = ٢س + ٢ نق + $\frac{1}{2}$ محيط الدائرة

∴ ٢س + ٢نق + πنق = ٦ ⟸ ∴ ٢س = ٦ − ٢نق − πنق

∴ س = $\frac{\text{٦} - \text{٢نق} - \pi\text{نق}}{\text{٢}}$ ← (١)

∵ مساحة النافذة = مساحة المستطيل + مساحة نصف الدائرة

∴ م = س × ٢نق + $\frac{1}{2}\pi$ نق^2 بالتعويض من (١) عن قيمة س

∴ م = $\frac{\text{٦} - \text{٢نق} - \pi\text{نق}}{\text{٢}}$ × ٢نق + $\frac{1}{2}\pi$نق^2 = ٦نق − ٢نق^2 − πنق^2 + $\frac{1}{2}\pi$نق^2

∴ م = ٦نق − ٢نق^2 − $\frac{1}{2}\pi$ نق^2 بالتفاضل بالنسبة للمتغير نق

∴ $\frac{\text{دم}}{\text{دنق}}$ = ٦ − ٤نق − πنق ، ∵ عند أكبر قيمة أو أصغر قيمة يكون $\frac{\text{دم}}{\text{دنق}}$ = ٠

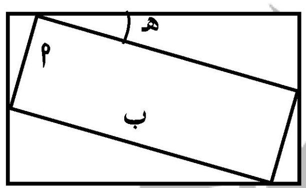
∴ ٦ − ٤نق − πنق = ٠ ⟸ ∴ ٤نق + πنق = ٦ ⟸ ∴ نق = $\frac{\text{٦}}{\text{٤} + \pi}$

∵ $\frac{\text{د}^2\text{م}}{\text{دنق}^2}$ = −٤ − π < ٠ ∴ المساحة اكبر مايمكن ∴ نق = $\frac{\text{٦}}{\text{٤} + \pi}$ سم

مثـــال:

في الشكل المقابل:

أوجد أكبر مساحة للمستطيل الذي يمكن رسمه خارج المستطيل الذي بعداه هما الثابتان ا ، ب.

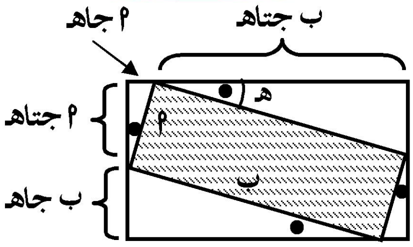


الحـــل:

نفرض أن اكبر مستطيل هو المستطيل المرسوم خارج المستطيل المظلل

من هندسة الشكل نجد أن الزوايا التى بها نفس العلامة كلها = هـ

وبالتالى فإن بعدى اكبر مستطيل كما هو موضح بالرسم هما:



(أ جاهـ + ب جتاهـ) ، (أ جتاهـ + ب جاهـ)

∵ مساحة المستطيل = حاصل ضرب طولا بعديه

∴ م = (أ جاهـ + ب جتاهـ)(أ جتاهـ + ب جاهـ)

= $أ^2$ جاهـ جتاهـ + أب $جا^2$هـ + أب $جتا^2$هـ + $ب^2$ جاهـ جتاهـ

∴ م = ($أ^2 + ب^2$) جاهـ جتاهـ + أب ($جا^2$هـ + $جتا^2$هـ) = ($أ^2 + ب^2$) × $\frac{1}{2}$ جا٢هـ + أب × ١

∴ م = $\frac{1}{2}$($أ^2 + ب^2$) جا٢هـ + أب ← (١) بالتفاضل بالنسبة للمتغير هـ

∴ $\frac{دم}{دهـ}$ = $\frac{1}{2}$($أ^2 + ب^2$) × ٢ جتا٢هـ = ($أ^2 + ب^2$) جتا٢هـ

، ∵ عند أكبر قيمة أو أصغر قيمة يكون $\frac{دم}{دهـ}$ = ٠

∴ ($أ^2 + ب^2$) جتا٢هـ = ٠ ⇐ ∴ جتا٢هـ = ٠ ⇐ ∴ ٢هـ = ٩٠° ⇐ ∴ هـ = ٤٥°

∵ $\frac{د^2م}{دهـ^2}$ = −٢($أ^2 + ب^2$) جا٢هـ

عند هـ = ٤٥° ∴ $\frac{د^2م}{دهـ^2}$ = −٢($أ^2 + ب^2$) جا٢ × ٤٥° = −٢($أ^2 + ب^2$) < ٠

∴ المساحة اكبر مايمكن عند هـ = ٤٥°

بالتعويض فى (١) نجد أن اكبر مساحه هى:

∴ م = $\frac{1}{2}$($أ^2 + ب^2$) جا ٩٠° + أب = $\frac{1}{2}$($أ^2 + ب^2$) + أب

= $\frac{(أ^2 + ب^2 + ٢أب)}{٢}$ = $\frac{(أ + ب)^2}{٢}$ وحدة مساحة